

单轴柔性铰链转角刚度的计算机辅助计算

刘 伟

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130021)

摘要: 柔性铰链可以实现微小线位移和角位移, 用途十分广泛。但是其转角刚度计算比较复杂。本文通过柔性铰链的受力简图推导出了单轴柔性铰链的转角刚度计算公式, 并将之编制成 BASIC 语言程序, 利用计算机就可以很轻松地计算出柔性铰链的转角刚度。

关键词: 柔性铰链; 转角刚度; 计算机辅助计算

中图分类号: TP391.72 文献标识码: A

1 引言

柔性铰链是六十年代前后由于宇航和航空技术发展的需要而逐渐开发出来的。它可以用于绕轴作复杂运动的有限角位移, 它的特点是无机械摩擦、无间隙、运动灵敏度高。柔性铰链一开发出来就被广泛地应用于陀螺仪、加速度计、精密天平等各种精密仪器仪表中, 并获得了前所未有的高精度和稳定性。近年来柔性铰链又被应用于精密微位移工作台, 开创了工作台进入纳米级的新时代。但是柔性铰链转角刚度的计算比较复杂, 用手计算计算量比较大, 而且容易出错。运用计算机编制简单的 BASIC 语言程序就可以很轻松地计算出单轴柔性铰链的转角刚度。

2 单轴柔性铰链的转角刚度计算公式

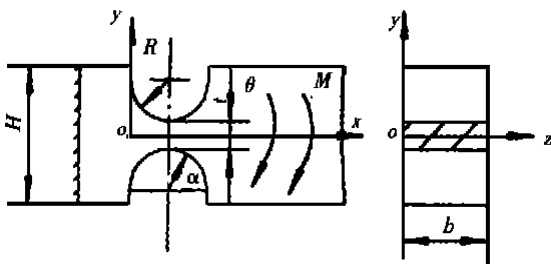


Fig. 1 Diagram of force on flexible hinge
常用的单轴柔性铰链受力简图如图 1, 在实

际应用中一般 $2R + t < H$ 。在图 1 中, 力矩 M 使柔性铰链发生了 θ 角的微小角位移。由积分学知道, 曲线的斜率为:

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

实际上柔性铰链的角位移非常非常小, 因此可以认为

$$\theta = \tan\theta \quad (1)$$

这样就得到柔性铰链的转角

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

在研究柔性铰链的变形时, 可以将柔性铰链分为 N 个微小段, 任意取出一个微小段 dx 进行分析, 整个柔性铰链的变形就是全部 N 个微小段 dx 的和。每个微小段可以认为是长度为 dx 的等截面矩形梁。根据材料力学^[2]可知, 柔性铰链在弯曲时中性面的微小段 dx 的曲率为:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (3)$$

式中: E ——材料的弹性模量

$J(x)$ ——微小段 dx 的截面对 Z 轴的惯性矩

$M(x)$ ——作用于微小段 dx 的弯矩

由高等数学可知, 曲线 $y = f(x)$ 上任意一点的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 则得

$$\frac{M(x)}{EJ(x)} = \pm \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (5)$$

式(5)右边带有正负两个符号, 必须要肯定地采用其中一个, 这个问题与坐标轴正向及弯矩 M 的符号规则有关。在这里我们只关心各量的大小, 而不必管其方向, 因此取绝对值即可。而且由于转角 $\theta = \frac{dy}{dx}$ 非常小, $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \ll 1$, 式(5)可以简化为

$$\frac{M(x)}{EJ(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6)$$

将式(6)两端乘以 dx , 并进行一次积分则得到

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx \quad (7)$$

由于柔性铰链的 $2R$ 比较小, 可以认为作用在柔性铰链全 $2R$ 长度上 $M(x)$ 变化不大, 将 $M(x)$ 看作常数, 这样就可得转角刚度公式

$$K = \theta/M = \int \frac{dx}{x EJ(x)} \quad (8)$$

将式 8 中直角坐标转换成极坐标。如图 2, $dx = R d\alpha \sin\alpha = R \sin\alpha d\alpha$, $J(x) = \frac{bh^3}{12}$, $h = 2R + t - 2R \sin\alpha$ 。将它们代入式(8), 得到转角刚度公式

$$K = \theta/M = \int_0^\pi \frac{12R \sin\alpha}{Eb (2R + t - 2R \sin\alpha)^3} d\alpha = \frac{12R}{Eb} \int_0^\pi \frac{\sin\alpha}{(2R + t - 2R \sin\alpha)^3} d\alpha \quad (9)$$

从式(9)可以看出, 若要求得 $K = \theta/M$ 就必须对 $\int_0^\pi \frac{\sin\alpha}{(2R + t - 2R \sin\alpha)^3} d\alpha$ 进行积分, 但要想将之直接进行积分非常困难。用手计算只有进行数值插值计算, 如果采用龙贝格算法取八等分进行积分, 那么计算量比较大, 而且容易出错。尤其是有时为了要有合适的 R 与 t , 必须每次都要重新代入 R 和 t 重新计算, 因此计算量就更大。

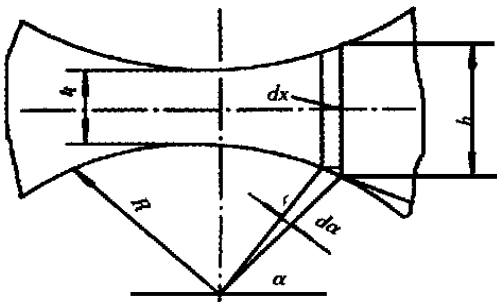


Fig. 2 Diagram of coordinate transform

3 编制程序

为了简化计算, 利用计算机计算即快又准确。BASIC 语言简单方便易掌握, 任何 DOS6.x 版本都有, 很容易得到, 因此用 BASIC 语言编制计算程序可以很方便很容易的计算。对

$\int_0^\pi \frac{\sin\alpha}{(2R + t - 2R \sin\alpha)^3} d\alpha$ 积分就是计算函数

$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{(2R + t - 2R \sin\alpha)^3}$ 与 x 轴所夹在 0 到 π 之间的面积。使用梯形法计算定积分既简单又准确。程序使用简单变量 N, R, t, b, E 。程序的框图如图 3。在计算完转角刚度显示出结果后, 计算机又立即显示出

“MORE INPUT(1= YES, 0= NO)

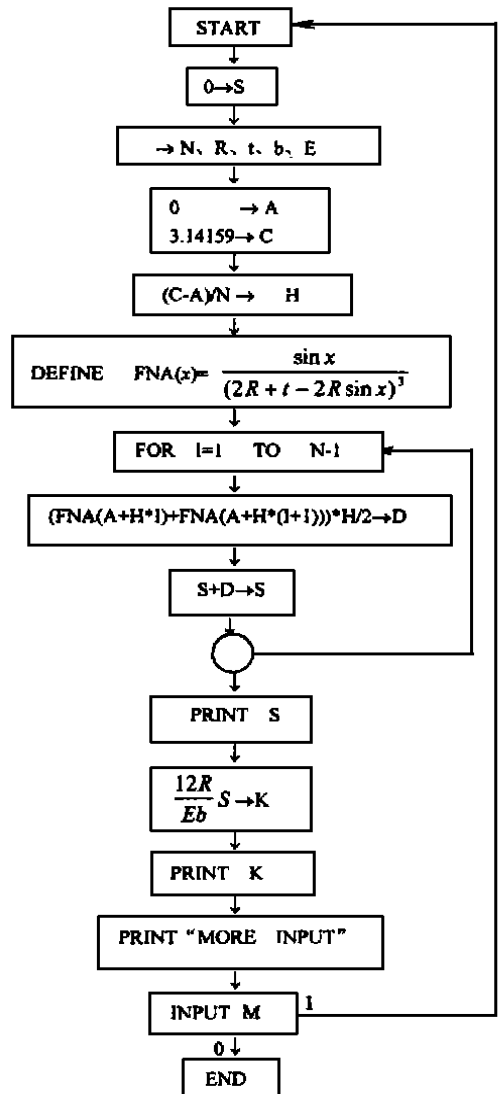


Fig. 3 The flow chart of design program

如果回答“1”表示还要计算,程序重新运行并询问新的 N 、 R 、 t 、 b 、 E 。如果回答“0”则表示不再计算,程序结束。

程序清单如下:

```

10 LET S=0
20 PRINT "N= ,R= ,t= ,b= ,E= "
30 INPUT N,R,t,b,E
40 PRINT
50 LET A=0
60 LET C=3.1415926
70 LET H=(C-A)/N
80 DEF FNA(x)=SIN(x)((2R+t-
2RSIN(x))* * 3)
90 FOR I=0 TO N-1
100 LET D=(FNA(A+H*I)+FNA(A
+H*(I+1)))*H/2
110 LET S=S+D
120 NEXT I
130 PRINT "S=";S
140 LET K=12*R*S/(E*b)
150 PRINT "K=";K

```

```

160 PRINT "MORE INPUT(1= YES,
0= NO)"
170 INPUT M
180 PRINT
190 IF M=1 THEN GOTO 10
200 END

```

在程序中 N ——在 $0 \sim 3.1415926$ 区间等分的点数,一般取 $N=1000$ 已足够准确
 R ——见图 1,单位为 mm
 t ——见图 1,单位为 mm
 b ——见图 1,单位为 mm
 E ——材料的弹性模量,单位为 GPa
 K ——柔性铰链的转角刚度,单位为 rad/N m

4 结 束 语

通过简单的 BASIC 程序就可以轻松地计算柔性铰链的转角刚度,特别是当需要不断凑试合适的 R 、 t 、 b 时,就更比手工计算轻松多了。

参考文献:

- [1] 薛实福.精密仪器设计[M].北京:清华大学出版社,1991.
- [2] 梁治明,丘侃,陆耀洪.材料力学[M].北京:高等教育出版社,1984.
- [3] 徐芝纶.弹性力学(上册)[M].北京:高等教育出版社,1990.
- [4] 陶龙芳.BASIC 程序设计例题解[M].北京:轻工业出版社,1988.
- [5] 张巨洪,刘祖照,朱军.BASIC 语言程序设计[M].北京:清华大学出版社,1983.

Computer aided calculation of angle stiffness of single axis flexible hinge

LIU Wei

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021, China)

Abstract: Flexible hinge can realize micro-displacement of linear and angle by revolving around its axis, so its usage is widely. One of important performances of flexible hinge is its angle stiffness. When angle stiffness of flexible hinge has been calculated, its displacement can be controlled easily. Hence, acquiring angle stiffness of flexible hinge is very important for its application. However, the angle stiffness is difficult to calculate, especially by manual methods. This article concludes the formula of angle stiffness of single axis flexible hinge by its force diagram. In order to simplify the calculating process the article makes a program for the formula, with which the angle stiffness of single axis flexible hinge can be calculated easily.

Key words: flexible hinge; angle stiffness; computer aided calculation

作者简介:刘伟(1967-),男,山东沂水县人。1990年毕业于陕西机械学院精密仪器工程系并获得学士学位。一直从事精密仪器、超精密加工、精密测试的设计研究工作。